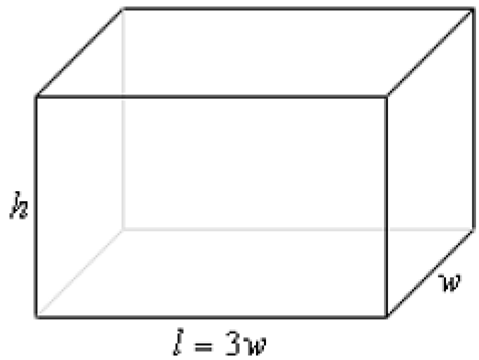
بهینه سازی هزینه در ساخت یک جعبه مکعبی:

می خواهیم یک جعبه که طول آن سه برابر عرض آن می باشد را بسازیم و ماده ای که برای ساختن بالا و زیر جعبه هزینه می شود ، و $\$10/\mathrm{ft}^2$ ماده ای که برای ساخت وجوه جانبی استفاده می‌شود ، قیمت $\$6/\mathrm{ft}^2$ دارد.

اگر جعبه حجمی به مقدار $50\ \mathrm{ft}^3$ ، داشته باشد مسئله بهینه سازی ما تعیین ابعاد جعبه می باشد به طوریکه هزینه ساخت جعبه کمینه باشد.

حل مسئله:

۱- شکل مسئله:



۲- مرحله بعد تعیین مدل ریاضی مسئله می باشد:

$$\text{Minimize: } C = 10(2lw) + 6(2wh + 2lh) = 10(2\cdot 3w\cdot w) + 6(2wh + 2\cdot 3w\cdot h) = 60w^2 + 48wh$$
$$\text{Constraint: } lwh = 3w^2h = 50$$

حال با استفاده از حجم شرط یا قیدی به صورت زیر داریم که آن را در تابع هزینه بالا قرار می‌دهیم و داریم:

$$3w^2h = 50 \implies h = \frac{50}{3w^2} \implies C = 60w^2 + 48wh = 60w^2 + 48w\cdot\frac{50}{3w^2} = 60w^2 + \frac{800}{w}$$

حال با استفاده از قضیه زیر به ادامه حل مسئله می‌پردازیم:

- اگر $f'(x) > 0$ برای هر $x < c$ و $f'(x) < 0$ برای هر $x > c$ باشند سپس $f(c)$ ماکزیمم مطلق f خواهد بود.
- اگر $f'(x) < 0$ برای هر $x < c$ و $f'(x) > 0$ برای هر $x > c$ باشند سپس $f(c)$ مینیمم مطلق f خواهد بود.

حال با استفاده از این قضیه و مشتق اول $C(w)$ داریم:

$$C'(w)=\left(60w^2+\frac{800}{w}\right)'=120w-\frac{800}{w^2}=\frac{120w^3-800}{w^2}$$

زمانی که $w>0$ تنها عدد بحرانی تابع هزینه خواهد بود:

$$w=\sqrt[3]{\frac{800}{120}}=\sqrt[3]{\frac{20}{3}}\approx 1.8821$$

آسان است نشان دادن اینکه $C'(w)<0$ برای هر $0<w<\sqrt[3]{\frac{20}{3}}$ و $C'(w)>0$ برای هر $w>\sqrt[3]{\frac{20}{3}}$

پس، کمترین مقدار تابع هزینه در $w=\sqrt[3]{\frac{20}{3}}$ اتفاق می افتد، و ابعاد عبارتند از:

$$w=\sqrt[3]{\frac{20}{3}}\approx 1.8821\ \text{ft},\quad l=3w=3\sqrt[3]{\frac{20}{3}}\approx 5.6463\ \text{ft},\quad h=\frac{50}{3w^2}\approx 4.7050\ \text{ft}$$

و در نهایت کمینه تابع هزینه که منجر به مینیمم شدن هزینه ما در ساخت جعبه می شود خواهد بود:

$$C\left(\sqrt[3]{\frac{20}{3}}\right)\approx \$637.60.$$